2015 東大理系数学 第5問

$_{2015}C_1 = 2015$ 奇数

$_{2015}C_2 = \dfrac{2015\times\cancel{2014}}{\cancel{2}\times 1} = 2015\times 1007$ 奇数

2014は2が1つしか含まれてない。

$_{2015}C_3 = \dfrac{2015\times\cancel{2014}\times 2013}{3\times\cancel{2}\times 1} = \dfrac{2015\times 1007\times 2013}{3\times 1}$ 奇数

ココが奇数だと、結果も奇数

$_{2015}C_4 = \dfrac{2015\times\overset{1007}{\cancel{2014}}\times 2013\times\overset{503}{\cancel{2012}}}{\cancel{4}\times 3\times\cancel{2}\times 1} = \dfrac{2015\times 1007\times 2013\times 503}{3}$ 奇数

4に対して、2012が4の倍数なので、結果も奇数

2015, 2014, 2013 … と数を小さくしていって、
2^3 の倍数に初めてなる時、
2^4 の倍数　　〃
2^5 の倍数に　〃　　を探す

$2014 = 2\times 1007$　2が1コ
$2012 = 2^2\times 503$　〃 2コ
$2010 = 2\times 1005$　〃 1コ
$2008 = 2^3\times 251$　〃 3コ ◀調べる
$2006 = 2\times 1003$　〃 1コ
↓
$2000 = 2^4\times 5^3$　〃 4コ ◀調べる
↓
$1984 = 2^6\times 31$　〃 5コ ◀調べる

$_{2015}C_8 = \dfrac{2015\times 2013\times 2011\times 2009}{7\times 5\times 3\times 1}\times\dfrac{\overset{251}{\cancel{2008}}\times\overset{1005}{\cancel{2010}}\times\overset{503}{\cancel{2012}}\times\overset{1007}{\cancel{2014}}}{\cancel{8}\times\underset{3}{\cancel{6}}\times\cancel{4}\times\cancel{2}}$ 奇

$_{2015}C_{16} = (\text{奇数部分})\times\left(\dfrac{2014\times 2012\times 2010\times 2008}{2\times 4\times 6\times 8}\right)$ 奇数

$\times\dfrac{\overset{1003}{\cancel{2006}}\times\overset{501}{\cancel{2004}}\times\overset{1001}{\cancel{2002}}\times\overset{125}{\cancel{2000}}}{\underset{5}{\cancel{10}}\times\underset{3}{\cancel{12}}\times\underset{7}{\cancel{14}}\times\cancel{16}}$

奇数

$_{2015}C_{32} = (\text{奇数部分})\times\left(\dfrac{2014\times 2012\times\cdots\times 2000}{2\times 4\times\cdots\times 16}\right)$ 奇数

$\times\dfrac{\overset{999}{\cancel{1998}}\times\overset{499}{\cancel{1996}}\times\overset{997}{\cancel{1994}}\times\overset{249}{\cancel{1992}}\times\overset{995}{\cancel{1990}}\times\overset{497}{\cancel{1988}}\times\overset{993}{\cancel{1986}}\times\overset{2\times 31}{\cancel{1984}}}{\underset{9}{\cancel{18}}\times\underset{5}{\cancel{20}}\times\underset{11}{\cancel{22}}\times\underset{3}{\cancel{24}}\times\underset{13}{\cancel{26}}\times\underset{7}{\cancel{28}}\times\underset{15}{\cancel{30}}\times\cancel{32}}$ 偶

分母の2の個数を、分子の2の個数が上回った!!
よって、答えを $m=32$ として、証明する。

実は、2015の1つ大きい、2016を考えると、
$2016 = 2^5\times 63$ なので、
2015から小さくしていって、初めて 2^6 の倍数になる、1984が鍵になる!!

(答) $N = 2016 = 2^5\times 63$ とすると、

$$_{2015}C_m = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)\cdots\times(N-m)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times m}$$

1以上31以下の整数 k は、

$k = 2^p\times q$ $(p = 0, 1, 2, 3, 4,\ q$ は奇数$)$
とおける
この k に対して、

$N-k = 2^5\times 63 - 2^p\times q$
$= 2^p(\underbrace{63\times 2^{5-p}}_{p<4\text{で偶数}} - \underbrace{q}_{\text{奇}})$ ◀ 2^p の倍数

よって、$k = 2^p\times q$ と $N-k = 2^p(63\times 2^{5-p} - q)$ の2のべき乗は一致する。

以上、$_{2015}C_m = \dfrac{\boxed{(N-1)}}{\boxed{1}}\times\dfrac{\boxed{(N-2)}}{\boxed{2}}\times\cdots\times\dfrac{\boxed{(N-m)}}{\boxed{m}}$
　奇数　奇数　　奇数

の分母と分子の2のべき乗が一致するので、
$_{2015}C_m$ は奇数である。

$1\leqq m\leqq 31$ には $_{2015}C_m$ が偶数になる m がないことを示している。が、難しい。